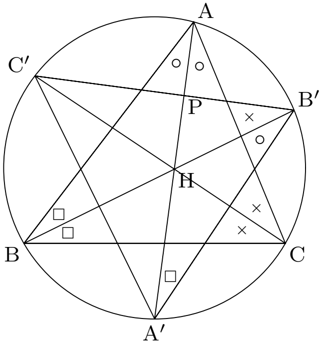
$\triangle$ABC において，$\angle$A の二等分線とこの三角形の外接円との交点で A と異なる点を A$'$ とする。同様に $\angle$B, $\angle$C の二等分線とこの外接円との交点をそれぞれ B$'$, C$'$ とする。このとき 3 直線 AA$'$, BB$'$, CC$'$ は 1 点 H で交わり，この点 H は三角形 A$'$B$'$C$'$ の垂心と一致することを証明せよ。

【解答】



$\angle$A, $\angle$B, $\angle$C の二等分線は $\triangle$ABC の内心 I を通るから AA$'$, BB$'$, CC$'$ は一点 I で交わる。すなわち H は $\triangle$ABC の内心に他ならない。

$\triangle$ABC において

$$\angle \mathrm{A} = \alpha,\ \angle \mathrm{B} = \beta,\ \angle \mathrm{C} = \gamma$$

とおくと，円周角の定理より

$$\begin{aligned}\angle \mathrm{BB'A'} &= \angle \mathrm{BAA'} \\ &= \frac{\alpha}{2}\ (\because\ \mathrm{AA'}\text{は}\angle \mathrm{A}\text{ の二等分線})\end{aligned}$$

同様にして

$$\angle \mathrm{AA'B'} = \frac{\beta}{2},\ \angle \mathrm{BB'C'} = \frac{\gamma}{2}$$

直線 AA$'$ と B$'$C$'$ の交点を P とすると，

$$\begin{aligned}\angle \mathrm{A'PB'} &= 180^\circ - (\angle \mathrm{PA'B'} + \angle \mathrm{PB'A'}) \\ &= 180^\circ - \left\{ \frac{\beta}{2} + \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{2} \right) \right\} \\ &= 180^\circ - \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma)\end{aligned}$$

三角形の内角の和は 180° であるから，$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$. よって，$\angle \mathrm{A'PB'} = 90^\circ$, すなわち $\mathrm{AA'} \perp \mathrm{B'C'}$

同様にして，$\mathrm{BB'} \perp \mathrm{C'A'}$, $\mathrm{CC'} \perp \mathrm{A'B'}$.

したがって H は，$\triangle$A$'$B$'$C$'$ の垂心であることが示された。